RdP 1 Sonderübung 2 WS 08/09

① Leiten Sie aus den folgenden Potenzialen $V(\vec{r})$ die zugehörigen Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ ab:

a) $V(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|}$

b) $V(\vec{r}) = \vec{r}\cdot(\vec{a}\circ\vec{a})\vec{r}$

c) $V(\vec{r}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{\vec{b}\cdot\vec{r}}$

d) $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{a})\cdot\hat{H}(\vec{r}-\vec{a})$

e) $V(\vec{r}) = (\vec{a}\times\vec{r})\cdot\vec{b}$

f) $V(\vec{r}) = \frac{\ln|\vec{a}\cdot\vec{r}|}{r}$

g) $V(\vec{r}) = \ln r$

h) $V(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

② Finden Sie, falls möglich, die Potenziale $V(\vec{r})$ zu den folgenden Kraftfeldern (in 2 bzw. 3 Dimensionen):

a) $\vec{F} \doteq (y^2-2xy,\ 2xy-x^2)$

b) $\vec{F} \doteq (yz\sin(xyz),\ zx\sin(xyz),\ xy\sin(xyz))$

c) $\vec{F} \doteq (y^2-2xy,\ 2xy+x^2)$

d) $\vec{F} \doteq (-\frac{x}{r},\ -\frac{y}{r},\ +\frac{z}{r})$

e) $\vec{F} \doteq -(y+z,\ z+x,\ h(x,y,z)=?)$

f) $\vec{F} \doteq -(g'(x)+y,\ x+h'(y))$

g) $\vec{F} \doteq -(g'(x)+yh'(x),\ h(x))$

[Test auf Potenzial: $\partial_i F_j \overset{!}{=} \partial_j F_i$ für $i,j = x,y(,z)$ weil $F_i = -\partial_i V$]

③ Skizzieren Sie die Vektorfelder (und Äquipotenziallinien ?) für $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{H}\vec{r}$ in 2 Dimensionen, mit:

↑ für welche Fälle?

a) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

④ Die lineare homogene ODE 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. Schreiben Sie sie um in eine Matrix-ODE erster Ordnung für $\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ in der Form $\dot{\vec{r}} = \hat{H}\vec{r}$ mit $H = ?$

Berechnen Sie die Lösung $\vec{r}(t) = e^{t\hat{H}}\vec{r}(0)$ für H aus ③ a)–c) und skizzieren Sie die Bahnkurven in der $(x,\dot{x})$-Ebene (Phasenraum) für einige Startwerte $\vec{r}(0)$. Wie passen die Kurven $\vec{r}(t)$ mit den Vektorfeldern aus ③ zusammen? Welche physikalischen Systeme werden durch diese drei Fälle beschrieben?